

## 2.2. Размещения с повторениями и без повторений

**Определение.** Размещениями из  $n$  элементов по  $m$  называются соединения из  $n$  элементов по  $m$ , которые отличаются друг от друга либо своими элементами (составом), либо порядком их расположения.

Термин «упорядоченная» означает, что порядок следования элементов в выборке существенен: выборки с одними и теми же элементами, но с разным порядком их следования различны.

**Теорема 3.** Число различных размещений без повторений  $A_n^m$  из  $n$  элементов по  $m$  равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1)$$

для выборки без возвращения.

Число размещений с повторениями  $\overline{A_n^m}$  из  $n$  элементов по  $m$  равно

$$\overline{A_n^m} = n^m \quad (2)$$

для выборки с возвращением.

**Задача.** Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы:  $\{A, B, C, D\}$ . Записать все возможные размещения из 4 указанных букв по две: а) без повторений; б) с повторениями.

**Задача.** Пусть имеется множество, содержащее 2 буквы  $\{A, B\}$ . Записать все возможные размещения с повторениями из 4-х букв.

**Задача.** В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

**Задача.** У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера – составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

**Задача.** Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона, который состоит из 7 цифр. Сколько существует вариантов выбора при условии: а) все цифры номера различны; б) все цифры номера могут быть любыми из имеющихся десяти; в) четыре последние цифры телефонного номера одинаковы.

### 2.3. Перестановки без повторений

**Определение.** Размещения, в которых участвуют все  $n$  элементов генеральной совокупности, называются перестановками без повторений из  $n$  элементов. Перестановки состоят из одних и тех же элементов, но отличаются между собой порядком.

**Теорема.** Число перестановок  $n$  различных элементов равно  $n!$ , т.е.

$$P_n = n!$$

*Доказательство.* Так как перестановки являются частным случаем размещений, то при  $n = m$  получаем

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

### 2.4. Перестановки с повторениями

**Определение.** Перестановками с повторениями называются соединения из генеральной совокупности, каждое из которых содержит  $n$  элементов, среди которых элемент

1  $a$  повторяется  $1$   $n$  раз,

2  $a$  повторяется  $2$   $n$  раз,

.....

$n$   $a$  повторяется  $k$   $n$  раз

$$1 n + 2 n + \dots + k n = n$$

и которые отличаются друг от друга только порядком расположения различных элементов.

**Теорема.** Число перестановок с повторениями  $\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$

равно  $\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ .

**Задача.** Пусть имеется множество букв  $\{A, B, C\}$ . Записать все возможные перестановки.

**Задача.** Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова «брак»?

**Задача.** Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

**Задача.** Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

## 2.5. Сочетания без повторений

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать  $m$  из  $n$  различных предметов?

**Определение.** Сочетаниями из  $n$  различных элементов по  $m$  называются соединения из  $n$  элементов по  $m$  ( $m$   $n$ ), которые отличаются друг от друга только составом элементов. ✪

**Теорема.** Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Числа  $C_n^m$  называются биномиальными коэффициентами: они являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^n a^n b^0 = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$$

и обладают рядом замечательных свойств:

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m,$$

## 2.6. Сочетания с повторениями

**Определение.** Сочетаниями с повторениями называются соединения из  $n$  элементов по  $m$  (выбор с возвращением  $m$  элементов), которые отличаются только составом и при этом отдельные соединения могут содержать повторяющиеся элементы.

**Теорема.** Число  $\overline{C}_n^m$  сочетаний с повторениями равно

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

**Задача.** Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы  $\{A, B, C, D\}$ . Запишем все возможные сочетания из указанных букв по 3.

**Задача.** Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

**Задача.** Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

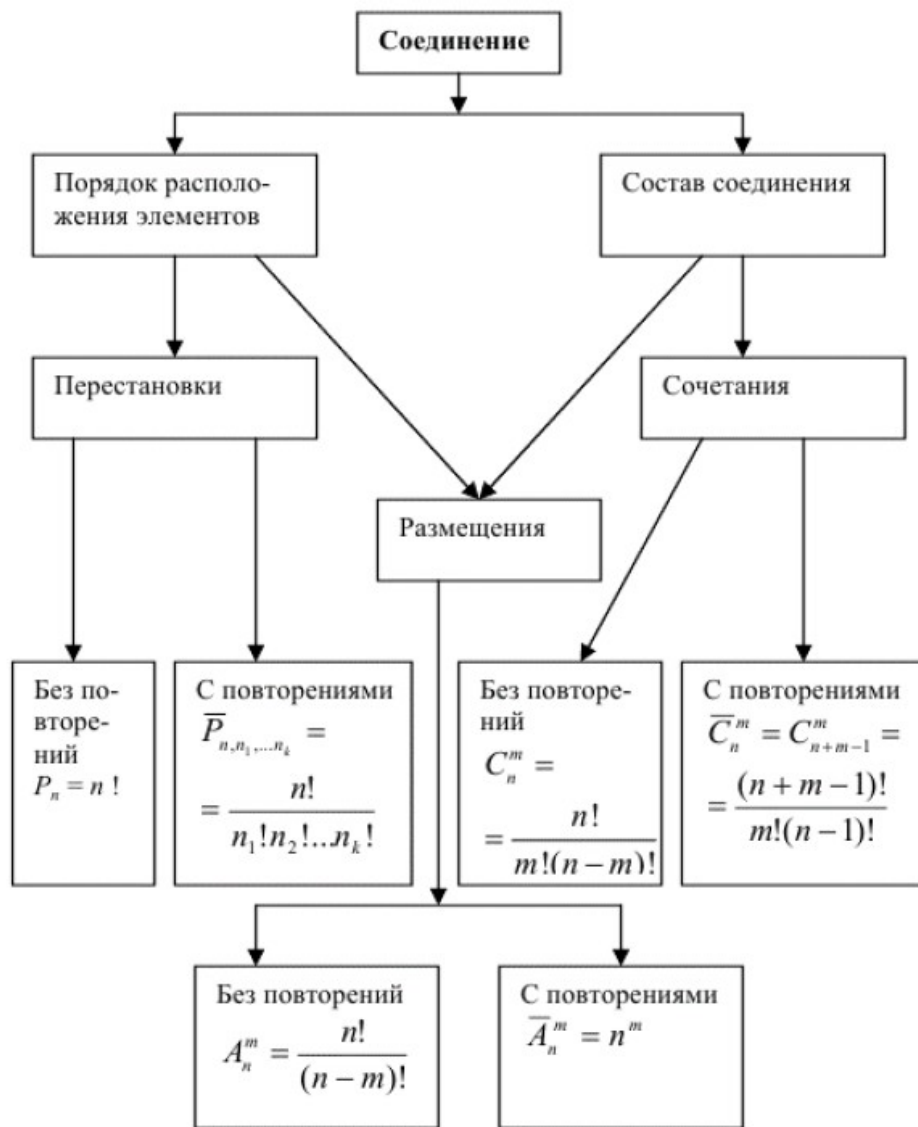
**Задача.** Сколько существует вариантов опроса 11 учащихся на одном занятии, если ни один из них не будет подвергнут опросу дважды и на занятии может быть опрошено

любое количество учащихся, причем порядок, в котором опрашиваются учащиеся, безразличен?

**Задача.** Имеются 2 буквы  $A$ , 2 буквы  $B$ , 2 буквы  $C$ . Сколькими способами можно выбрать две из этих шести букв?

**Задача.** В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные 4 заказа на литературу. Сколько существует вариантов такого заказа?

**Задача.** В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?



## 2.8. Рекомендации по решению задач

Решение комбинаторных задач представляет известную трудность для начинающих. Причин много, но одна из них очевидна - при изложении комбинаторики используется своя специфическая терминология (генеральная совокупность, выборка, правила выбора). В задаче же этих терминов, как правило, нет – сформулирована она на обычном литературном языке и комбинаторные понятия присутствуют в ней в неявной форме. Поэтому после усвоения содержания задачи нужно ее «перевести» на математический язык.

*Для этого необходимо выяснить,*

- 1) что является генеральной совокупностью - она всегда будет присутствовать в задаче, т. е. комбинаторные задачи связаны с выбором объектов, а этот выбор из чего-то (генеральной совокупности) производится; каков объем генеральной совокупности;
- 2) одна или несколько генеральных совокупностей;
- 3) что является выборкой и каков объем выборки;
- 4) правила выбора: допустимы или нет повторы, важен ли порядок выбираемых элементов, возможно ли изменение состава.

*После этого полезно для себя переформулировать задачу на языке генеральных совокупностей и выборок. В зависимости от ситуации выбрать нужную формулу (см. таблицу). Иногда в более сложных задачах приходится использовать совместно несколько формул.*

**БАНК ЗАДАЧ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Имеется множество чисел  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Составить следующие виды соединений по 2 элемента из четырех: а) размещения без повторений; б) размещения с повторениями; в) сочетания без повторений; г) сочетания с повторениями.

2. Из Москвы до Новосибирска можно добраться поездом и самолетом; из Новосибирска в Томск - поездом, самолетом, автобусом, парходом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Москва - Новосибирск-Томск?

*Ответ:* 8.

3. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на этот же вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями.

*Ответ:* 49

4. Стадион имеет 4 входа. Сколькими способами болельщик может войти на стадион в один вход, а выйти через другой?

*Ответ:* 12.

5. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

*Ответ.* Если взято яблоко.

6. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:

- а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;
- б) цифры могут повторяться;
- в) числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)?

*Ответ:* а) 300; б) 1080; в) 540.

7. Сколькими способами можно разместить 4 книги на полке?

*Ответ:* 24.

8. Сколькими способами можно поставить в ряд 6 человек для выполнения их группового портрета? Сколькими способами можно это сделать, если поставить трех человек в переднем ряду и трех во втором?

*Ответ:* 720.

9. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «лодка»?

*Ответ:* 120.

10. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «математика»?

*Ответ:* 151200.

11. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

*Ответ:* 389188800.

12. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

*Ответ:* = 151200. 6 10 A

13. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов на студенческую конференцию из группы в 20 человек?

*Ответ:* 1140.

14. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получить вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

*Ответ:* 60.

15. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

*Ответ:* 10.

16. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если материал пяти различных цветов?

*Ответ:* 60.

17. В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 3 женские роли?

*Ответ:*  $\cdot = 10!60640$ . 5 10 А 3 8 А

18. Из колоды в 52 карты выбирают 3. Сколькими способами может быть сделан выбор «тройка, семерка, туз»?

*Ответ:* 64.

19. На олимпиаду пришло 8 студентов. Сколькими способами их можно распределить в 3 аудитории?

*Ответ:*  $6501 = 3 \cdot 8$

20. Сколькими способами можно распределить 10 специалистов по четырем цехам, чтобы в них попало соответственно 1, 2, 3, 4 специалиста?

*Ответ:* 12600.

21. Сколькими способами можно расселить 8 студентов по трем комнатам: одноместной, трехместной и четырехместной?

*Ответ:* 280.

22. Учителю для урока труда нужно принести 28 листов цветной бумаги. В учительской имеется белая, синяя, красная, зеленая и желтая бумага. Сколькими способами учитель может выбрать нужные ему 28 листов?

*Ответ:* 35960.

23. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где есть 11 разных сортов пирожных?

*Ответ:* 8008.

24. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны (1, 3, 5, 7, 9)?

*Ответ:* 15625.

25. Сколькими способами можно рассадить 7 человек за круглым столом?

*Ответ:* 5040.

26. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

*Ответ:* 720.

27. Восемь девушек отправились в путешествие на двух лодках, в меньшей из которых могли поместиться не более четырех, а в большей - не более шестерых. Сколькими различными способами они могут распределиться в разные лодки? (Распределения считаются различными, если хотя бы одна из девушек окажется в другой лодке.)

*Ответ:*  $++ = 154$ . 2 8 С 3 8 С 4 8 С

28. В классе 29 учеников. Сколько существует различных вариантов присутствия (отсутствия) этих учеников в классе?

*Ответ:* 229.

29. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Сколько существует вариантов такой записи, если: а) числа будут записаны в порядке возрастания; б) числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания; в) на четных местах будут стоять четные числа; г) сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10?

*Ответ:* а) 1; б)  $8! = 40320$ ; в)  $5! 4! = 2880$ ; г)  $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$ .

30. Сколько четных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2? *Ответ:* 16.



## **ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

### **Вариант 1**

1. Из двух спортивных обществ, насчитывающих 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

*Ответ:* . 4 10

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100 + 200 + 100 + 800? Сколькими способами можно это сделать?

*Ответ:* 657720.

3. Сколько различных браслетов можно сделать, имея пять одинаковых изумрудов, шесть одинаковых рубинов и семь одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней). (Браслет не изменится при циклической перестановке камней и при переворачивании).

*Ответ:* 408408

### **Вариант 2**

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

*Ответ:* 20.

2. 25 выпускников школы решили обменяться фотографиями. Сколько было всего заказано фотографий?

*Ответ:* 600.

3. Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров (надо использовать все 7 бусинок)? (Надо учесть, что ожерелье остается неизменным при циклической перестановке бусинок и при переворачивании).

*Ответ:* 360.

### **Вариант 3**

1. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «камзол»?

*Ответ:* 8.

2. Сколько нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694 (каждую цифру можно использовать не более одного раза)?

*Ответ:* 12.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется 2 туза?

*Ответ:* 226093964.

### **Вариант 4**

1. Бросается игральная кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий восемь граней. Сколькими способами могут они упасть?

*Ответ:* 48. 36

2. Сколько четных чисел можно составить из цифр числа 3694 (каждую цифру можно использовать не более одного раза)?

*Ответ:* 12.

3. На железнодорожной станции имеется 10 светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый и зеленый?

*Ответ:* 59049.

### **Вариант 5**

1. На ферме есть 20 коз и 24 овца. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну козу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

*Ответ:* 480; 437.

2. Поезду, в котором находится 10 пассажиров, предстоит сделать 5 остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры, выходящие на остановках?

*Ответ:* 9.765.625.

3. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «зебра»?

*Ответ:* 120.

### **Вариант 6**

1. Из слов, среди которых 12 мужского, 9 женского и 10 среднего рода, выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

*Ответ:* 1080.

2. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?

*Ответ:* 81. 37

3. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «баран»?

*Ответ:* 60.

### **Вариант 7**

1. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?

*Ответ:* 9.

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать?

*Ответ:* 27405.

3. На полке стоит 5 книг в черных переплетах и 4 книги в синих переплетах, причем все книги разные. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы книги в черных переплетах стояли рядом?

*Ответ:* 14400.

### **Вариант 8**

1. Из учебников, среди которых 3 экземпляра по алгебре, 7 экземпляров по геометрии и 7 экземпляров по тригонометрии, надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами можно это сделать?

*Ответ:* 147.

2. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

*Ответ:* 45.

3. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

*Ответ:* 5040.

### **Вариант 9**

1. Имеются 3 волчка с 6; 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть при одновременном запуске?

*Ответ:* 480.

2. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

*Ответ:* 18.

3. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

*Ответ:* 729.

### **Вариант 10**

1. Сколькими способами можно выбрать 4 карты из полной колоды карт (52) по одной карте каждой масти?

*Ответ:* 28561.

2. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

*Ответ:* 10.

3. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выбрать одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

*Ответ:* 12180.

### **Вариант 11**

1. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого, если среди всех книг нет одинаковых?

*Ответ:* 63.

2. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор точек и тире. Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырех знаков?

*Ответ:* 30.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется один туз?

*Ответ:* 33542132800.

### **Вариант 12**

1. Для проведения экзамена создается комиссия из 2 преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

*Ответ:* 10.

2. Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 30 букв) и четырех цифр (используется 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

*Ответ:*  $27 \cdot 10 \cdot 7$

3. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «водород»?

*Ответ:* 420.

### **Вариант 13**

1. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделены 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурства, если каждый учащийся дежурит один раз?

*Ответ:* 720.

2. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если все путевки одинаковы?

*Ответ:* 10.

3. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй - 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

*Ответ:* 2800.

### **Вариант 14**

1. Имеется три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть, если известно, что, по крайней мере, два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

*Ответ:* 22.

2. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 1 и 2?

*Ответ:* 1024.

3. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 8 открыток?

*Ответ:* 24310.

### **Вариант 15**

1. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52) по одной карте каждой масти при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, то есть двух королей, двух десятков и т. д.

*Ответ:* 17 160.

2. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй - 4, а четвертый - 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

*Ответ:* 171 531 360.

3. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого - 9 книг. Сколькими способами они могут обменять 2 книги одного на две книги другого, если все книги разные?

*Ответ:* 756.

### **Вариант 16**

1. В седьмом классе изучаются 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

*Ответ:* 240240.

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый 15-угольник?

*Ответ:* 90.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз?

*Ответ:* 17 189 320 434.

### **Вариант 17**

1. Сколько шестизначных чисел кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

*Ответ:* 120.

2. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если все путевки различны?

*Ответ:* 60.

3. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

*Ответ:* 293 930.

### **Вариант 18**

1. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выделить 2 человек для дежурства, если один из них должен быть старшим?

*Ответ:* 870.

2. Для освещения зала может быть включено различное количество из имеющихся 10 ламп. Сколько существует различных способов освещения?

*Ответ:* 1024.

3. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждая команды встретились между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?

*Ответ:* 18.

### **Вариант 19**

1. Сколько различных двухзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3,4? (Цифры не повторяются).

*Ответ:* 12.

2. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые 2 команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

*Ответ:* 306.

3. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

*Ответ:* 371.

### **Вариант 20**

1. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выделить 2 человек для дежурства, если старшего быть не должно?

*Ответ:* 435.

2. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «задача»?

*Ответ:* 120.

3. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

*Ответ:* 17 417